ミルカさんの隣で*

結城浩†

2005 年 5 月

高校二年の夏。僕はいつものように、誰もいない図書室で数式をいじっていた。

そこへミルカさんがやってきて、隣の席に座った。かすかにオレンジの香りがする。彼女は、僕のノートをのぞきこんで尋ねた。「微分？」

まあね、と僕は答える。

ミルカさんは「ふうん」と言ってから、顔を上げて目をつむり、形のよい唇をささやくように動かす。何かおもしろいことを考えているらしい。

数秒後、彼女は目を開けて「要は変化量じゃない。微分って」と言いながら、僕のノートに勝手に書き込み始めた。僕は黙って、彼女の話を聞く。

> 要は変化量じゃない。微分って。
>
> たとえばね、現在の位置を x とする。そこから少し離れた位置を $x+h$ とする。h はあまり大きくない。「すぐそば」だね。いま、h だけ離れたときに、関数 f の値がどう変化するかを考えてみよう。x ならば、関数 f の値は $f(x)$ だ。$x+h$ ならば、関数 f の値は $f(x+h)$ になる。…よね？

ミルカさんは語尾を急に上げて、僕を見る。僕は、うん、と答える。彼女はにこっと笑ってから真面目な顔に戻り、先を続ける。

> 対比が際立つように明示的に 0 も書くことにするね。$x+0$ にいるとき、f の値は $f(x+0)$ だ。$x+h$ に進めば、f の値は $f(x+h)$ になる。
>
> $x+0$ から $x+h$ に進んだときの x の変化量は、$(x+h)-(x+0)$ になる。一方、$x+0$ から $x+h$ に進んだときの f の変化量は、$f(x+h)-f(x+0)$ だ。
>
> 関数 f の変化量を調べたいんだけれど、x の変化量 $(x+h)-(x+0)$ が大きければ、f の変化量も大きくなるかもしれないから、両者の比を取ることにしよう。
>
> $$\frac{f(x+h)-f(x+0)}{(x+h)-(x+0)}$$
>
> そして、$h \to 0$ の極限をとる。要するに、これが微分だよね。
>
> $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x+0)}{(x+h)-(x+0)}$$

---

* http://www.hyuki.com/story/diffsum.html

† http://www.hyuki.com/ Hiroshi Yuki

そんなことは分かっているよ、と僕は言いかけたけれど、ミルカさんがまた目を閉じるのを見て、僕は黙った。きっと、まだ言いたいことがあるんだろう。ミルカさんが僕のすぐ隣に座って、こんな風に勝手に話し込むのはめずらしいことではない。この状況は、僕も決して嫌いではない。彼女は続ける。

そうね。いま、関数 f に対して「微分」という操作を施すことを、演算子 D を使って Df のように書くことにする。つまり、演算子 D を次のように定義するのよ。

$$Df(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x+0)}{(x+h) - (x+0)}$$

もちろん、次のように定義してもいいのよ。同じことだから。いずれにせよ、演算子 D は、関数から関数を作る高階関数ね。

$$Df(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

さて、と。ここまでの話は**連続的な世界**の話だったわね。x はなめらかに動くことができた。これから、ここまでの話を全部、**離散的な世界**に持っていくことにするよ。連続的な世界では、$x+0$ から $x+h$ まで —— つまり「すぐそば」まで —— x を移して f の変化量を考えた。じゃ、離散的な世界ではどう考えたらいいと思う？

ミルカさんの問いに対して、僕は少し考える。連続的な世界の「すぐそば」に対応する概念を、離散的な世界から見つければいいんだろう。僕は図書館をぐるっと見回してから、すぐ隣に座っているミルカさんの顔をじっと見て、「すぐそば」の代わりに「すぐ隣」を考えればいい、と答えた。

ミルカさんは微笑んで「その通り」と人差し指を一本立てる。

その通り。

離散的な世界で考えると、$x+0$ の「すぐそば」は、$x+1$ つまり「すぐ隣」になる。$h \to 0$ ではなく $h = 1$ で考えるのね。「すぐ隣」があるっていうのが離散的な世界の特徴といってもいい。それに気がつけば、議論はうまく展開するよ。

$x+0$ から $x+1$ に進むときの x の変化量は、$(x+1) - (x+0)$ で、そのときの関数 f の変化量はもちろん $f(x+1) - f(x+0)$ だよね。微分を考えたときと同じように両者の比を考える。

$$\frac{f(x+1) - f(x+0)}{(x+1) - (x+0)}$$

離散的な世界では、もう極限を考える必要はない。だからこの式こそ「離散的な世界での微分」すなわち**差分**になる。差分を得る演算子 Δ を以下のように定義しよう。

$$\Delta f(x) = \frac{f(x+1) - f(x+0)}{(x+1) - (x+0)}$$

これはもちろん、以下のように簡単にできる。

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

こうしてみると、確かに Δ は「差分」という名前に値する演算だわね。

連続的な世界の「微分」と、離散的な世界の「差分」を並べてみよう。対応が分かりやすいように冗長な書き方をするよ。

$$
\begin{array}{ccc}
\text{連続的な世界の「微分」} & \longleftrightarrow & \text{離散的な世界の「差分」} \\
\mathrm{D}f(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x+0)}{(x+h)-(x+0)} & \longleftrightarrow & \Delta f(x) = \dfrac{f(x+1)-f(x+0)}{(x+1)-(x+0)}
\end{array}
$$

ミルカさんは、とても楽しそうだ。僕も、何だか楽しくなってきた。彼女の話を聞いていると、いつもそうだ。何かに引き込まれていくような感じがする。ミルカさんは、指先で僕のシャープペンシルをくるっと回してから、話を続けた。

抽象的な $f(x)$ だけじゃつまらないから、具体的な関数で考えてみようか。たとえば、$f(x) = x$ で微分と差分を比べてみよう。

まずは微分。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}f(x) &= \mathrm{D}x \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-(x+0)}{(x+h)-(x+0)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

そして差分。

$$
\begin{aligned}
\Delta f(x) &= \Delta x \\
&= \frac{(x+1)-(x+0)}{(x+1)-(x+0)} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

微分も差分も同じ 1 になる。ということで、関数 $f(x) = x$ に対しては、微分と差分がちょうど一致することがわかったよね。

次に、$f(x) = x^2$ について考えてみようか。今度は微分と差分が一致するかな。

微分。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}f(x) &= \mathrm{D}x^2 \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-(x+0)^2}{(x+h)-(x+0)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 2x+h \\
&= 2x
\end{aligned}
$$

そして差分。

$$
\begin{aligned}
\Delta f(x) &= \Delta x^2 \\
&= \frac{(x+1)^2 - (x+0)^2}{(x+1) - (x+0)} \\
&= (x+1)^2 - x^2 \\
&= 2x + 1
\end{aligned}
$$

$Dx^2 = 2x$ だけれど、$\Delta x^2 = 2x + 1$ になる。残念。さっきみたいに微分と差分は一致しない。これじゃ、つまらないわね。何とかして一致させたい。せめて、うまい対応付けを考えたい。どうする？

「どうする？」というミルカさんの問いかけに、僕は首をかしげて考える。微分と差分の対応付け…。でも、いいアイディアは浮かばない。僕から答えが出て来そうにないのを確かめると、ミルカさんはゆっくりと話し始める。彼女の声はとてもやわらかく響く。

実はね、そもそも、連続的な世界の x^2 に、離散的な世界の x^2 を対応付けようとしたのがよくなかったのよ。離散的な世界では、x^2 の代わりにこんな関数を考えてみよう。

$$
f(x) = (x-0)(x-1)
$$

さあ、$f(x) = (x-0)(x-1)$ の差分を計算するね。

$$
\begin{aligned}
\Delta f(x) &= \Delta(x-0)(x-1) \\
&= ((x+1)-0)((x+1)-1) - ((x+0)-0)((x+0)-1) \\
&= (x+1) \cdot x - x \cdot (x-1) \\
&= 2x
\end{aligned}
$$

ほら、これで微分と一致した。
つまりね、連続的な世界の x^2 と、離散的な世界の $(x-0)(x-1)$ とを対応付けることにするの。
対応がはっきりと分かるように、新たに $x^{\underline{n}}$ という表記法を考えることにする。こんな風に。

$$
x^2 = x \cdot x \qquad \longleftrightarrow \qquad x^{\underline{2}} = (x-0)(x-1)
$$

次のように書いてもいいわ。このほうが、対応がよくわかる。

$$
x^2 = \lim_{h \to 0} (x-0)(x-h) \qquad \longleftrightarrow \qquad x^{\underline{2}} = (x-0)(x-1)
$$

ここで使った、$x^{\underline{n}}$ という表記法は、次のように定義する。

$$
x^{\underline{n}} = \underbrace{(x-0)(x-1)\cdots(x-(n-1))}_{n\ 個}
$$

いくつか例を挙げると、こんな感じね。

$$
\begin{aligned}
x^{\underline{1}} &= (x-0)\\
x^{\underline{2}} &= (x-0)(x-1)\\
x^{\underline{3}} &= (x-0)(x-1)(x-2)\\
x^{\underline{4}} &= (x-0)(x-1)(x-2)(x-3)
\end{aligned}
$$

じゃ今度は $f(x) = x^3$ について考えてみよう。もう途中の式は省略してもいいよね。
まずは微分。

$$
\begin{aligned}
Df(x) &= Dx^3\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-(x+0)^3}{(x+h)-(x+0)}\\
&= \cdots\\
&= 3x^2
\end{aligned}
$$

離散的な世界では、x^3 の対応物として、$x^{\underline{3}} = (x-0)(x-1)(x-2)$ を考える。さあ、$x^{\underline{3}}$ の差分を計算するよ。

$$
\begin{aligned}
\Delta f(x) &= \Delta x^{\underline{3}}\\
&= \Delta(x-0)(x-1)(x-2)\\
&= ((x+1)-0)((x+1)-1)((x+1)-2)\\
&\qquad -((x+0)-0)((x+0)-1)((x+0)-2)\\
&= \cdots\\
&= 3(x-0)(x-1)\\
&= 3x^{\underline{2}}
\end{aligned}
$$

$x^{\underline{n}}$ という表記を利用すれば、次のように対比させることができる。

$$
\begin{aligned}
x^3 = \lim_{h\to 0}(x-0)(x-h)(x-2h) &\qquad\longleftrightarrow\qquad x^{\underline{3}} = (x-0)(x-1)(x-2)\\
Dx^3 = 3x^2 &\qquad\longleftrightarrow\qquad \Delta x^{\underline{3}} = 3x^{\underline{2}}
\end{aligned}
$$

あとは繰り返せばよいだけだから、一般的に書いておくね。

$$
Dx^n = nx^{n-1} \qquad\longleftrightarrow\qquad \Delta x^{\underline{n}} = nx^{\underline{n-1}}
$$

なるほど、おもしろいね、と僕はミルカさんに言う。確かにおもしろい。きちんと対応付けができている。彼女は僕を見て、またにこっと笑う。今日、彼女はとても機嫌がいい。

「微分 $\leftrightarrow$ 差分」を考えたから、今度は「積分 $\leftrightarrow$ 和分」を考えるね。単純計算だから結果だけ書こうか。

$$
\begin{aligned}
\int 1 &= x & &\longleftrightarrow & \sum 1 &= x \\
\int t &= \frac{x^2}{2} & &\longleftrightarrow & \sum t &= \frac{x^{\underline{2}}}{2} \\
\int t^2 &= \frac{x^3}{3} & &\longleftrightarrow & \sum t^{\underline{2}} &= \frac{x^{\underline{3}}}{3} \\
\int t^{n-1} &= \frac{x^n}{n} & &\longleftrightarrow & \sum t^{\underline{n-1}} &= \frac{x^{\underline{n}}}{n} \\
\int t^n &= \frac{x^{n+1}}{n+1} & &\longleftrightarrow & \sum t^{\underline{n}} &= \frac{x^{\underline{n+1}}}{n+1}
\end{aligned}
$$

ここで、$\int$ の方はすべて $\int_0^x$ で考え、$\sum$ の方はすべて $\sum_{0 \le t < x}$ だと思ってね。

象徴的に、以下のような対比もできるよ。

$$
\begin{aligned}
D &\quad\longleftrightarrow\quad \Delta \\
\int &\quad\longleftrightarrow\quad \sum
\end{aligned}
$$

$\int$ はローマ文字の S で、$\sum$ はギリシア文字の S だと考えると、なおいっそう対比を楽しめるわ。連続的な世界はローマに、離散的な世界はギリシアにあるのかもね。

ミルカさんの話を聞きながら、僕は、彼女の「すぐそば」$(h \to 0)$ に居られないとしても、せめて「すぐ隣」$(h = 1)$ には居たいものだ、と思った。

参考文献

- Graham, Knuth, Patashnik, 『コンピュータの数学』, ISBN 4-320-02668-3, 共立出版, 1993.
  「離散系および連続系の微積分学」(p.47) の、D および Δ の演算子や下降階乗冪 $x^{\underline{n}}$ の解説などを参考にしました。
- 金谷健一, 『これなら分かる応用数学教室』, ISBN 4-320-01738-2, 共立出版, 2003.
  ローマ文字とギリシア文字の話題 (p.16) を参考にしました。

読者のみなさんへ

「ミルカさんの隣で」の PDF ファイルは、以下の URL から入手できます。フィードバックもこのページから送ることができますので、ぜひみなさんのご感想をお聞かせください。

ミルカさんの隣で

`http://www.hyuki.com/story/diffsum.html`